با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی هشتم
فصل ششم

عنوان فصل: مثلث

از صفحه‌ی ۸۳ تا صفحه‌ی ۱۰۰ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل مثلث آمده است.

مباحث فصل: رابطه‌ی فیثاغورس، شکل‌های هم‌نهشت، مثلث‌های هم‌نهشت، هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱ صفحه ۸۴ · فعالیت — مساحت مربع‌های روی ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه ... ۵

۲ صفحه ۸۵ · فعالیت — نمایش رابطه‌ی فیثاغورس با قطعه‌های کاغذی ... ۶

۳ صفحه ۸۵ · خواندنی — اثبات نیریزی برای رابطه‌ی فیثاغورس ... ۶

۴ صفحه ۸۶ · کار در کلاس — بررسی رابطه‌ی فیثاغورس و یافتن x، y و z ... ۶

۵ صفحه ۸۶ · فعالیت — پیدا کردن ضلع مجهول و تساوی‌های جبری ... ۷

۶ صفحه ۸۷ · کار در کلاس — ارتفاع مخروط و رسم پاره‌خط به طول رادیکال ۱۰ ... ۷

۷ صفحه ۸۷ · تمرین — محیط مثلث و تشخیص مثلث قائم‌الزاویه ... ۸

۸ صفحه ۸۷ · تمرین — طول مسیر بین طبقه‌های توقف‌گاه ... ۹

۹ صفحه ۸۸ · فعالیت — شکل‌های هم‌نهشت و تبدیل‌ها ... ۹

۱۰ صفحه ۸۹ · کار در کلاس — دوران، انتقال و اجزای متناظر ... ۱۰

۱۱ صفحه ۹۰ · فعالیت — اندازه‌ها در شکل‌های هم‌نهشت و تشکیل معادله ... ۱۱

۱۲ صفحه ۹۱ · تمرین — مثلث‌های هم‌نهشت با مثلث الف ... ۱۲

۱۳ صفحه ۹۱ · تمرین — هم‌نهشتی در خرپای پل ۱۲

۱۴ صفحه ۹۱ · تمرین — یافتن زاویه‌های مجهول ۱۲

۱۵ صفحه ۹۲ · فعالیت — ساختن مثلث با سه زاویه‌ی داده شده ... ۱۳

۱۶ صفحه ۹۲ · کار در کلاس — زاویه‌های مساوی در دو مثلث ... ۱۳

۱۷ صفحه ۹۲ · فعالیت — ساختن مثلث با سه ضلع داده شده (ض ض ض) ... ۱۴

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — میانه‌ی مثلث متساوی‌الساقین ... ۱۴

۱۹ صفحه ۹۴ · فعالیت — ساختن مثلث با دو ضلع و زاویه‌ی بین (ض ز ض) ... ۱۵

۲۰ صفحه ۹۴ · کار در کلاس — نیمساز زاویه‌ی رأس مثلث متساوی‌الساقین ... ۱۵

۲۱ صفحه ۹۴ · فعالیت — ساختن مثلث با دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) ... ۱۵

۲۲ صفحه ۹۵ · کار در کلاس — مثلث با دو زاویه‌ی برابر ۱۶

۲۳ صفحه ۹۵ · تمرین — تشخیص حالت هم‌نهشتی دو مثلث ... ۱۶

۲۴ صفحه ۹۵ · تمرین — اجزای مساوی و حالت هم‌نهشتی ... ۱۶

۲۵ صفحه ۹۵ · تمرین — مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیربین ... ۱۷

۲۶ صفحه ۹۶ · فعالیت — هم‌نهشتی با وتر و یک ضلع (و ض) ... ۱۷

۲۷ صفحه ۹۶ · کار در کلاس — ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین و جفت مثلث‌های هم‌نهشت ... ۱۸

۲۸ صفحه ۹۷ · فعالیت — هم‌نهشتی با وتر و یک زاویه‌ی تند (و ز) ... ۱۸

۲۹ صفحه ۹۷ · کار در کلاس — کاربرد حالت‌های (و ز) و (و ض) ... ۱۹

۳۰ صفحه ۹۸ · فعالیت — نقاط روی عمودمنصف و نیمساز ... ۱۹

۳۱ صفحه ۹۹ · تمرین — تشخیص هم‌نهشتی با شکل‌های داده شده ... ۲۰

۳۲ صفحه ۹۹ · تمرین — اجزای مساوی و حالت هم‌نهشتی در دایره ... ۲۰

۳۳ صفحه ۹۹ · تمرین — تبدیل منطبق‌کننده‌ی مثلث‌ها ۲۰

۳۴ صفحه ۱۰۰ · تمرین ترکیبی — طول سطح شیب‌دار ۲۱

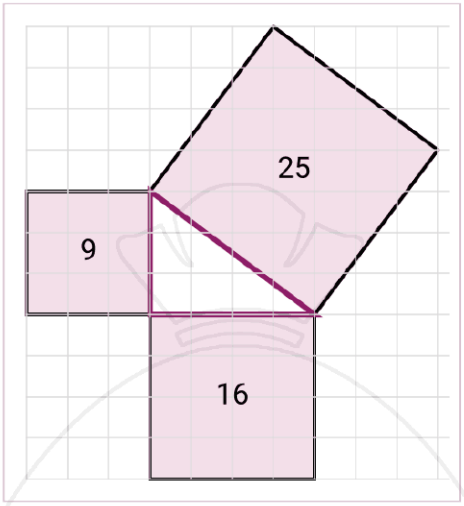
۳۵ صفحه ۱۰۰ · تمرین ترکیبی — الگوی مثلث‌های هم‌نهشت و محیط ... ۲۱

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱ صفحه ۸۴ فعالیت

۱ــ روی هر ضلع مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی شبکه‌ی شطرنجی یک مربع رسم شده است. با شمارش مربع‌های شطرنجی، مساحت هر مربع را به دست آورید و جدول را کامل کنید. چه ارتباطی بین عددهای هر سطر می‌بینید؟

در سطر (الف) مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های ۳ و ۴ و وتر ۵ است (مربع‌ها: ۲۵، ۹ و ۱۶).



	a^2 (وتر)	b^2	c^2
الف	25	9	16
ب	13	4	9
ج	10	1	9
د	8	4	4

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ارتباط: در هر سطر، مساحت مربع روی وتر با مجموع مساحت‌های دو مربع دیگر برابر است: 16 + 9 = 25، 13 = 4 + 9، 10 = 1 + 9، 8 = 4 + 4. یعنی $a^2 = b^2 + c^2$.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۲ صفحه ۸۵ فعالیت

۲ــ هر یک از شکل‌ها روشی برای نمایش رابطه‌ی مساحت مربع‌های روی ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه است. روی کاغذ یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید و روی هر ضلع آن مربعی بسازید؛ سپس مربع‌های دو ضلع کوچک را به قطعه‌های کاغذی تقسیم کنید که مربع روی وتر را کاملاً بپوشانند.

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های ۳ و ۴ و ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم و روی هر ضلع مربع می‌سازیم. مربع ۳×۳ (مساحت ۹) و مربع ۴×۴ (مساحت ۱۶) را به قطعه‌های کوچک (مثلاً مربع‌های واحد یا چند قطعه‌ی مثلثی و چهارضلعی) برش می‌دهیم.

نتیجه: قطعه‌های این دو مربع دقیقاً و بدون هم‌پوشانی، مربع ۵×۵ (مساحت ۲۵) روی وتر را می‌پوشانند. پس مجموع مساحت دو مربع کوچک با مساحت مربع وتر برابر است: $9 + 16 = 25$، یعنی $a^2 = b^2 + c^2$.

۳ صفحه ۸۵ خواندنی

در شکل، چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی هم‌نهشت دیده می‌شود. سمت راست مربع‌های روی دو ضلع زاویه‌ی قائمه و سمت چپ مربع روی وتر رنگ شده است. چرا مساحت ناحیه‌ی رنگی در این دو شکل برابر است؟

هر دو شکل مربعی بزرگ به ضلع $a + b$ هستند که مساحت یکسان دارند و در هر دو، چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی هم‌نهشت (هر کدام به مساحت $ab/2$) از آن جدا شده است.

پس مساحت باقی‌مانده نیز در دو شکل برابر است: در یک شکل مجموع دو مربع $a^2 + b^2$ و در شکل دیگر مربع روی وتر c^2 است. بنابراین $c^2 = a^2 + b^2$.

۴ صفحه ۸۶ کار در کلاس

۱ــ درستی رابطه‌ی فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی روبه‌رو بررسی کنید.

۲ــ به ترتیب طول x، y و z را به دست آورید.

۱)

- مثلث با ضلع‌های ۵ و ۱۲ و وتر ۱۳: $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$
- مثلث با ضلع‌های ۱ و ۱ و وتر $\sqrt{2}$: $1^2 + 1^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$
- مثلث با ضلع‌های ۱ و $\sqrt{2}$ و وتر $\sqrt{3}$: $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

- $y^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow y = 5$ متر
- $x^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow x = 12$ متر
- $z^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow z = 4$ متر

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵ صفحه ۸۶ **فعالیت**

۱ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی دو ضلع داده شده است. اندازه‌ی ضلع مجهول را مانند نمونه پیدا کنید.

۲ــ تساوی‌های جبری زیر را کامل کنید: $a^2 = ___ + ___$، $b^2 = ___ - ___$، $c^2 = ___ - ___$

۱)

اگر وتر معلوم باشد، مجذور ضلع مجهول برابر است با تفاضل مجذور وتر و مجذور ضلع معلوم؛ اگر دو ضلع قائم معلوم باشد، مجذور وتر برابر مجموع مجذورهاست. مثلاً:

- ضلع‌های ۶ و ۸: $x^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow x = 10$
- وتر ۱۷ و یک ضلع ۸: $x^2 = 289 - 64 = 225 \Rightarrow x = 15$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

اگر a وتر باشد: $a^2 = b^2 + c^2$ و از آن $b^2 = a^2 - c^2$ و $c^2 = a^2 - b^2$ نتیجه می‌شود.

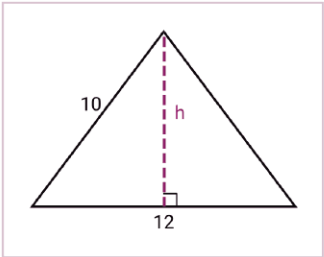
۶ صفحه ۸۷ **کار در کلاس**

۱ــ علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، مخروطی به قطر قاعده‌ی ۱۲ سانتی‌متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

۲ــ راه حل هر یک از سه دانش‌آموز (مهسا، سیما و زهرا) را توضیح دهید. کدام روش هندسی و کدام حسابی است؟

۱)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



شعاع دایره، همان یال (مولد) مخروط است: ۱۰ سانتی‌متر. شعاع قاعده 6 = 2 ÷ 12 است. ارتفاع، ضلع قائم مثلثی با وتر ۱۰ و ضلع ۶ است: $h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow h = 8$ سانتی‌متر.

۲)

- مهسا: با ماشین حساب مقدار تقریبی $\sqrt{10} \approx 3.16$ را پیدا می‌کند و با خط‌کش پاره‌خطی به طول تقریبی ۳٫۲ سانتی‌متر می‌کشد؛ روش حسابی.
- سیما: مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۳ می‌کشد؛ چون $1^2 + 3^2 = 10$، وتر آن $\sqrt{10}$ است؛ روش هندسی (دقیق).
- زهرا: با ساختن پی‌درپی مثلث‌های قائم‌الزاویه (ضلع قائم دوم همیشه ۱ و وتر مثلث قبل)، وترها $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{4}$ و ... ساخته می‌شوند تا به $\sqrt{10}$ برسد؛ روش هندسی.

۷ صفحه ۸۷ تمرین

۱ــ محیط مثلث ABC را حساب کنید.

۲ــ کدام مثلث قائم‌الزاویه است؟

۱)

AD ارتفاع مثلث است (BD = ۵، AD = ۱۲ و AC = ۱۵ سانتی‌متر). $AB^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow AB = 13$ و $DC^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow DC = 9$، پس BC = 5 + 9 = 14.

محیط: 13 + 14 + 15 = 42 سانتی‌متر.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

اگر مجذور بزرگ‌ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد، مثلث قائم‌الزاویه است. مثلث با ضلع‌های ۶، ۸ و ۱۰: $10^2 = 100 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow$ قائم‌الزاویه است. مثلث با ضلع‌های ۶، ۶ و ۷: $7^2 = 49 \neq 72 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow$ قائم‌الزاویه نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۸ صفحه ۸۷ تمرین

۳ــ شکل نمایی از یک توقف‌گاه طبقاتی را نشان می‌دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه‌ی بعدی می‌رساند، چقدر است؟

مسیر شیب‌دار وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های آن اختلاف ارتفاع دو طبقه (۳ متر) و طول افقی (۶ متر) است:

$x^2 = 3^2 + 6^2 = 45 \Rightarrow x = \sqrt{45} \approx 6.7$ متر.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹ صفحه ۸۸ فعالیت

۱ــ مثلث‌های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده‌اند. مشخص کنید از کدام تبدیل استفاده شده و ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی را علامت‌گذاری کنید.

۲ــ دو مثلث ABC و GHF هم‌نهشت‌اند. با توجه به علامت‌ها، تساوی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر را کامل کنید.

۳ــ راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید.

۱)

مثلث‌ها را به ترتیب تقارن محوری، انتقال، دوران و (دوباره) دوران یا تقارن می‌یابیم؛ در هر مثلث، ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر با مثلث قرمز را با علامت‌های یکسان (مثلاً یک، دو و سه خط کوچک روی ضلع‌ها و کمان‌های یکسان روی زاویه‌ها) نشان می‌دهیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

چون $\triangle GHF \cong \triangle ABC$، رأس‌ها به ترتیب متناظرند (A با G، B با H و C با F):

- $\hat{A} = \hat{G}$ ،$\hat{B} = \hat{H}$ ،$\hat{C} = \hat{F}$
- $BC = HF$ ،$AB = GH$ ،$AC = GF$

۳)

مثلاً می‌توان ابتدا مثلث XYZ را نسبت به یک خط (تقارن محوری) قرینه کرد و سپس آن را با یک انتقال بر مثلث LMN منطبق کرد. راه‌های درست دیگری هم وجود دارد (مثلاً یک انتقال و سپس یک دوران حول یک رأس).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰ صفحه ۸۹ کار در کلاس

۱ــ تصویر ذوزنقه‌ی ABCD را پس از دوران ۱۸۰° حول نقطه‌ی D رسم کنید و آن را $A_1B_1C_1D_1$ بنامید. سپس آن را با بردار داده شده انتقال دهید و شکل جدید را نام‌گذاری کنید. عبارت هم‌نهشتی را کامل کنید.

۲ــ با توجه به هم‌نهشتی شکل‌ها در هر قسمت، در صورت امکان اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر را پیدا کنید.

۳ــ دیواره‌های کنار پل از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی هم‌نهشت ساخته شده‌اند. زاویه‌های مساوی را مشخص کنید و اندازه‌ی زاویه‌های یکی از مثلث‌ها را بنویسید.

۱)

دوران و انتقال، اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهند، پس شکل‌های حاصل با ABCD هم‌نهشت‌اند. اگر شکل دوم را $A_2B_2C_2D_2$ بنامیم:

$$ABCD \cong A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$$

۲)

در هم‌نهشتی $GHIJ \cong KLMN$ به ترتیب رأس‌ها متناظرند: $GH = KL$، $HI = LM$، $IJ = MN$، $JG = NK$ و $\hat{G} = \hat{K}$، $\hat{H} = \hat{L}$، $\hat{I} = \hat{M}$، $\hat{J} = \hat{N}$. به همین ترتیب در $ABC \cong DEF$: $AB = DE$، $BC = EF$، $AC = DF$ و $\hat{A} = \hat{D}$، $\hat{B} = \hat{E}$، $\hat{C} = \hat{F}$. اندازه‌ی هر ضلع یا زاویه‌ی مجهول برابر اندازه‌ی ضلع یا زاویه‌ی متناظر معلوم آن است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳)

در هر مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه ۹۰° است و دو زاویه‌ی تند مجموعاً ۹۰° هستند. چون مثلث‌ها هم‌نهشت‌اند، زاویه‌های متناظر مساوی‌اند. مثلاً اگر یک زاویه‌ی تند ۵۰° باشد، دیگری $90° - 50° = 40°$ است و در همه‌ی مثلث‌ها همین سه زاویه (۹۰°، ۵۰° و ۴۰°) دیده می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱ــ در شکل، $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ و برخی ضلع‌ها و زاویه‌ها نوشته شده است. اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

۲ــ چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی افقی قرینه کرده‌ایم و چهارضلعی HIJK به دست آمده است. اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

۳ــ مثلث ABC را می‌توان با انتقال بر مثلث $A'B'C$ منطبق کرد. مانند نمونه با تشکیل و حل معادله، اندازه‌ی ضلع‌های مثلث‌ها را به دست آورید.

۱)

اجزای متناظر در دو مثلث هم‌نهشت مساوی‌اند؛ هر ضلع یا زاویه‌ی مجهول را برابر متناظرش بنویسید. همچنین زاویه‌ی سوم هر مثلث از رابطه‌ی مجموع زاویه‌ها به دست می‌آید؛ مثلاً اگر دو زاویه 37° و 117° باشند، سومی $180^\circ - 37^\circ - 117^\circ = 26^\circ$ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

قرینه‌سازی اندازه‌ها را حفظ می‌کند: $DE = HI$، $EF = IJ$، $FG = JK$، $GD = KH$ و زاویه‌های $\hat{D} = \hat{H}$، $\hat{E} = \hat{I}$، $\hat{F} = \hat{J}$، $\hat{G} = \hat{K}$. هر مقدار مجهول برابر مقدار متناظر معلوم است. این تساوی‌ها همه از هم‌نهشتی اجزای متناظر نتیجه می‌شوند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳)

معادله	حل	اندازه‌ها
$3x = x + 2$	$x = 1$	$AB = A'B' = 3$
$y + 3 = 5y - 5$	$4y = 8 \Rightarrow y = 2$	$BC = B'C' = 5$
$AC = A'C'$		$z = 7$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱۲ صفحه ۹۱ تمرین

۱ــ زاویه‌های مساوی را با رنگ‌های یکسان مشخص کرده‌ایم. کدام مثلث‌ها با مثلث الف هم‌نهشت‌اند؟ مانند نمونه مشخص کنید با چه تبدیل یا تبدیل‌هایی می‌توان مثلث الف را بر مثلث‌های هم‌نهشت با آن منطبق کرد. چهار مورد دیگر بنویسید.

مثلث‌هایی هم‌نهشت با مثلث الف هستند که اندازه‌ی ضلع‌هایشان با آن برابر باشد (فقط جابه‌جایی، دوران یا قرینه شده باشند). چهار مورد نمونه:

- الف ← ب: انتقال
- الف ← ج: تقارن محوری
- الف ← د: دوران 180° (حول یک نقطه)
- الف ← ه: تقارن و سپس انتقال

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳ صفحه ۹۱ تمرین

۲ــ سازه‌های مثلثی پل را می‌دانیم $\triangle ABC \cong \triangle BCD$. الف) کدام زاویه‌ی مثلث ABC روبه‌روی ضلع BC است؟ ب) کدام زاویه‌ی مثلث BCD روبه‌روی ضلع BC است؟ ج) اگر مثلث ABC را بر مثلث BCD منطبق کنیم، کدام زاویه با زاویه‌ی A متناظر است؟

- الف) زاویه‌ی $\hat{A}$
- ب) زاویه‌ی $\hat{D}$
- ج) در هم‌نهشتی $ABC \cong BCD$ رأس A با رأس B متناظر است، پس زاویه‌ی $\hat{B}$ با $\hat{A}$ متناظر است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴ صفحه ۹۱ تمرین

۳ــ زاویه‌های مجهول را بیابید. الف) مثلث HIG حاصل دوران ۹۰ درجه‌ی مثلث EFG حول نقطه‌ی G است. ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.

الف)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

زاویه‌های مثلث EFG برابر ۴۰°، 2x − 20 و x + 25 است: $x = 45 \Rightarrow 3x = 135 \Rightarrow 40 + 2x - 20 + x + 25 = 180$.

پس زاویه‌ها ۴۰°، ۷۰° و ۷۰° هستند و زاویه‌های مثلث HIG (هم‌نهشت با آن) نیز همین‌اند؛ پس $y = 70^\circ$ و $k = 40^\circ$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ب)

زاویه‌های متناظر مساوی‌اند: $y = 40 \Rightarrow 3y = 5y - 80$، پس $3y = 120^\circ$. مجموع زاویه‌های چهارضلعی ۳۶۰° است: $z = 110^\circ \Rightarrow 85 + 45 + 120 + z = 360$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۵ صفحه ۹۲ فعالیت

فکر می‌کنید مثلثی که آرمان و سامان با زاویه‌های برابر ساخته‌اند با مثلث اولیه هم‌نهشت است؟ آیا آنها می‌توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم‌نهشت باشد؟

نه، لزوماً هم‌نهشت نیست. با سه زاویه‌ی معلوم می‌توان مثلث‌هایی با اندازه‌های متفاوت (کوچک‌تر یا بزرگ‌تر) ساخت که زاویه‌هایشان برابر است، ولی ضلع‌هایشان یکسان نیست.

بله، ممکن است اتفاقاً مثلثی هم‌اندازه با مثلث اولیه بسازند، اما برابری سه زاویه برای هم‌نهشتی کافی نیست.

۱۶ صفحه ۹۲ کار در کلاس

۱ــ زاویه‌های مساوی را در هر قسمت علامت‌گذاری کنید. (دو مثلث متساوی‌الاضلاع، دو مثلث قائم‌الزاویه)

۲ــ شکل‌های سؤال قبل را نام‌گذاری کنید و تساوی زاویه‌ها را بنویسید.

در مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC و DEF همه‌ی زاویه‌ها ۶۰° است: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \hat{F} = 60^\circ$.

در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و DEF (قائمه در A و D) زاویه‌های قائمه برابرند و زاویه‌های تند نیز نظیر به نظیر برابرند: $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$، $\hat{B} = \hat{E}$، $\hat{C} = \hat{F}$.

هر دو جفت مثلث زاویه‌های مساوی دارند، ولی لزوماً هم‌اندازه نیستند، پس هم‌نهشت نیستند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷ صفحه ۹۲ فعالیت

۱ــ معلم مثلثی رسم کرد و سه ضلع آن را روی سه برگ کاغذ پوستی کشید. از بچه‌ها خواست مثلثی بسازند که ضلع‌هایش با این سه ضلع برابر باشد. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره‌ی آن فکر کنید.

۲ــ آرمان گفت: «اگر ضلع‌های دو شکل مساوی باشد حتماً هم‌نهشت‌اند؟» پاسخ شما چیست؟

۱)

یک ضلع را رسم می‌کنیم؛ با پرگار از دو سر آن کمان‌هایی به شعاع دو ضلع دیگر می‌زنیم. محل برخورد کمان‌ها رأس سوم است. هر مثلثی که بدین ترتیب ساخته شود با مثلث اولیه هم‌نهشت است؛ پس اگر سه ضلع دو مثلث نظیر به نظیر برابر باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند (حالت ض ض ض).

۲)

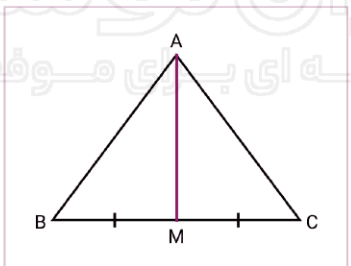
برای مثلث درست است، اما برای شکل‌های دیگر نه. مثلاً یک مربع و یک لوزی غیرمربع که چهار ضلع برابر دارند، هم‌نهشت نیستند، چون زاویه‌هایشان متفاوت است.

۱۸ صفحه ۹۳ کار در کلاس

۱ــ مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M وسط BC است. عبارت‌ها را کامل کنید و نشان دهید ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده برابرند. هم‌نهشتی را با یک عبارت نشان دهید.

۲ــ الف) لوزی را نام‌گذاری و یکی از قطرهایش را رسم کنید. ب) دلیل تساوی ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید. ج) زاویه‌های مساوی را مشخص کنید.

۱)



- AB = AC چون ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند.
- CM = BM چون M وسط BC است.
- AM هم ضلع مشترک دو مثلث است.

پس △ABM ≅ △ACM (حالت ض ض ض).

۲)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

لوزی ABCD را رسم می‌کنیم و قطر AC را می‌کشیم. AB = AD و CB = CD چون ضلع‌های لوزی با هم برابرند و AC ضلع مشترک است؛ پس △ADC ≅ △ABC (ض ض ض). در نتیجه $\hat{B} = \hat{D}$، ∠BAC = ∠DAC و ∠BCA = ∠DCA.

۱۹ صفحه ۹۴ **فعالیت**

مثلثی رسم کنید و دو ضلع آن و زاویه‌ی بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید. مثلثی بسازید که دو ضلع آن با این دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها با زاویه‌ی رسم شده برابر باشد. آیا این مثلث با مثلث اولیه هم‌نهشت است؟ آیا می‌توانید مثلثی بسازید که هم‌نهشت نباشد؟

بله، مثلث ساخته شده با مثلث اولیه هم‌نهشت است؛ چون دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها معلوم است، رأس سوم جای دیگری نمی‌تواند باشد. با این شرایط نمی‌توان مثلثی ساخت که هم‌نهشت نباشد. پس اگر دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها در دو مثلث نظیر به نظیر برابر باشد، دو مثلث هم‌نهشت‌اند (حالت ض ز ض).

۲۰ صفحه ۹۴ **کار در کلاس**

در مثلث متساوی‌الساقین ABC نیمساز زاویه‌ی A را رسم کرده‌ایم. عبارت‌ها را کامل کنید و نشان دهید دو مثلث ABD و ADC هم‌نهشت‌اند و دو زاویه‌ی مجاور قاعده با هم برابرند.

- AC = AB چون مثلث متساوی‌الساقین است.
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ چون AD نیمساز است.
- AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

پس △ADC ≅ △ABD (حالت ض ز ض) و در نتیجه زاویه‌های متناظر $\hat{B} = \hat{C}$ برابرند.

۲۱ صفحه ۹۴ **فعالیت**

مثلثی رسم کنید و دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید. مثلثی بسازید که دو زاویه و ضلع بین آنها با مثلث اولیه برابر باشد. آیا این مثلث با مثلث اولیه هم‌نهشت است؟ آیا می‌توانید مثلثی با همین شرایط بسازید که هم‌نهشت نباشد؟

بله، هم‌نهشت است؛ ضلع را رسم می‌کنیم و در دو سر آن زاویه‌ها را می‌سازیم؛ امتداد دو ضلع دیگر یکدیگر را فقط در یک نقطه قطع می‌کنند. نمی‌توان مثلث هم‌نهشت‌نشده‌ای با این شرایط ساخت. پس اگر دو زاویه و ضلع بین آنها در دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند (حالت ز ض ز).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۲ صفحه ۹۵ کار در کلاس

در شکل، زاویه‌های B و C با هم برابرند و نیمساز زاویه‌ی A را رسم کرده‌ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم‌نهشت‌اند و دو ضلع AB و AC برابرند. (راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ دلیل بیاورید.) نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند، آن مثلث ... است.

- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ چون AD نیمساز است و $\hat{B} = \hat{C}$ (فرض).
- پس $\hat{D}_1 = 180^\circ - \hat{A}_1 - \hat{B} = 180^\circ - \hat{A}_2 - \hat{C} = \hat{D}_2$ (مجموع زاویه‌های مثلث 180° است).
- AD ضلع مشترک است.

بنابراین $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (حالت ز ض ز) و $AB = AC$.

نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند، آن مثلث **متساوی‌الساقین** است.

۲۳ صفحه ۹۵ تمرین

۱ــ در هر قسمت، بعضی ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است پیدا کنید و حالت هم‌نهشتی را بنویسید.

قاعده: دو مثلث وقتی هم‌نهشت‌اند که یکی از این سه حالت برقرار باشد: سه ضلع نظیر به نظیر برابر (ض ض ض)؛ دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها (ض ز ض)؛ دو زاویه و ضلع بین آنها (ز ض ز). اگر زاویه‌ی برابر بین دو ضلع برابر نباشد (مثلاً دو ضلع و زاویه‌ی غیربین) یا فقط سه زاویه برابر باشد، اطلاعات کافی نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۴ صفحه ۹۵ تمرین

۲ــ در هر شکل اجزای مساوی را پیدا و علامت‌گذاری کنید؛ سپس حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید.
الف) هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند. ب) قطر متوازی‌الاضلاع رسم شده است. ج) دو قطر یکدیگر را در مرکز مشترک دو دایره قطع کرده‌اند.

- الف) در هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلع برابرند؛ با ضلع مشترک (یا ضلع‌های مساوی) سه ضلع نظیر به نظیر برابرند: (ض ض ض).
- ب) در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل برابرند و قطر ضلع مشترک دو مثلث است: (ض ض ض).
- ج) شعاع‌های هر دایره برابرند و زاویه‌های متقابل به رأس مساوی‌اند: (ض ز ض).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۵ صفحه ۹۵ تمرین

۳ــ اگر دو زاویه و یک ضلع غیربین از یک مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیربین از مثلثی دیگر برابر باشند، از شکل کدام مورد را می‌توان نتیجه گرفت؟ الف) دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. ب) ممکن است دو مثلث هم‌نهشت نباشند.

گزینه‌ی (الف). چون دو زاویه از دو مثلث برابرند، زاویه‌ی سوم هم برابر است (180° − مجموع دو زاویه‌ی دیگر)؛ پس ضلع برابر بین دو زاویه‌ی نظیر قرار می‌گیرد و دو مثلث به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت‌اند.

۲۶ صفحه ۹۶ فعالیت

۱ــ در هر قسمت، وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی DEF برابر است. اندازه‌ی ضلع سوم هر مثلث را پیدا کنید. آیا سه ضلع دو مثلث مساوی است؟ آیا دو مثلث هم‌نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟

۲ــ آیا اگر وتر و یک ضلع دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند؟ چرا؟

۱)

- وتر ۵ و ضلع ۲: ضلع سوم هر دو مثلث $\sqrt{(25-4)} = \sqrt{21}$
- وتر ۸ و ضلع ۷: ضلع سوم هر دو مثلث $\sqrt{(64-49)} = \sqrt{15}$

در هر قسمت سه ضلع دو مثلث نظیر به نظیر برابر است، پس مثلث‌ها به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند. چون هر دو قائم‌الزاویه‌اند، آن را (و ض) می‌نامیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

بله. طبق رابطه‌ی فیثاغورس ضلع سوم هر مثلث از وتر و ضلع دیگر به‌طور یکتا به دست می‌آید ($c^2 = a^2 - b^2$)؛ پس ضلع سوم دو مثلث برابر است و دو مثلث به حالت ض ض ض هم‌نهشت‌اند.

تیزهوشان نوشته
توشه ای برای موفقیت

۲۷ صفحه ۹۶ **کار در کلاس**

۱ــ پاره‌خط AH ارتفاع وارد بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین ABC است. چرا مثلث‌های ایجاد شده هم‌نهشت‌اند؟

۲ــ با توجه به علامت‌های شکل، مثلث‌های هم‌نهشت را پیدا کنید و حالت هم‌نهشتی هر جفت را بیان کنید.

۱)

دو مثلث ABH و ACH قائم‌الزاویه‌اند ($\hat{H} = 90^\circ$)، وترهایشان برابر است (AB = AC ساق‌های متساوی‌الساقین) و ضلع AH مشترک است؛ پس به حالت (و ض) هم‌نهشت‌اند.

۲)

هر جفت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر و یک ضلع (یا وتر و یک زاویه‌ی تند) نظیر به نظیر برابر دارند هم‌نهشت‌اند؛ حالت هر جفت را (و ض) یا (و ز) می‌نویسیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۸ صفحه ۹۷ **فعالیت**

۱ــ در هر قسمت، وتر و یک زاویه‌ی تند از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC با وتر و یک زاویه‌ی تند از مثلث قائم‌الزاویه‌ی DEF برابر است. زاویه‌ی دیگر هر مثلث را پیدا کنید. آیا دو مثلث هم‌نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟

۲ــ آیا اگر وتر و یک زاویه‌ی تند دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که هم‌نهشت‌اند؟ چرا؟

۱)

زاویه‌ی تند دوم برابر است با 90° – زاویه‌ی تند داده شده: برای 37° برابر 53°، برای 20° برابر 70° و برای 60° برابر 30° است. هر دو مثلث در هر قسمت سه زاویه‌ی برابر و وتر برابر دارند، پس به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

بله. زاویه‌ی تند دوم هر دو مثلث (90° – زاویه‌ی تند معلوم) برابر است. پس دو زاویه و ضلع (وتر) بین یا کنار آنها برابر است و مثلث‌ها به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت‌اند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۹۷ کار در کلاس

۱ــ از نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB، بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده‌ایم. دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟

۲ــ در شکل، هر شانزده زاویه‌ی کوچک وسط شکل با هم مساوی و هشت پاره‌خط آبی نیز با هم مساوی‌اند. شانزده مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟

۱)

هر مثلث قائم‌الزاویه است، وترها برابرند (MA = MB چون M وسط AB است) و زاویه‌های تند در M متقابل به رأس‌اند و مساوی‌اند؛ پس دو مثلث به حالت (و ز) هم‌نهشت‌اند.

۲)

هر مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه‌ی تند برابر (زاویه‌ی کوچک وسط) و یک ضلع برابر (پاره‌خط آبی) دارد؛ پس همه به حالت (و ز) هم‌نهشت‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۰ صفحه ۹۸ فعالیت

۱ــ آیا شادی با اندازه‌گیری یک مثال دلیلی برای درستی جمله‌ی «هر نقطه‌ی روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است» آورده است؟

۲ــ شادی دلیلی با هم‌نهشتی می‌آورد. آیا این بار دلیل آورده است؟ تساوی‌ها را توضیح دهید.

۳ــ برای درستی جمله‌ی «هر نقطه‌ی روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است» دلیل بیاورید.

۱)

خیر؛ اندازه‌گیری برای یک نقطه فقط درستی را در یک مثال نشان می‌دهد و ثابت نمی‌کند که برای همه‌ی نقاط درست است.

۲)

بله. فرض کنید K وسط AB و O نقطه‌ای دلخواه روی عمودمنصف است. در دو مثلث AOK و BOK:

- $\angle OKA = \angle OKB = 90^\circ$ چون OK بر AB عمود است.
- AK = KB چون K وسط AB است.
- OK ضلع مشترک است.

پس $\triangle AOK \cong \triangle BOK$ (حالت ض ز ض) و در نتیجه OA = OB.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳)

فرض کنید P نقطه‌ای روی نیمساز زاویه‌ی O و H و H' پای عمودهای P بر دو ضلع زاویه باشند. در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OPH و OPH': وتر OP مشترک است و $\angle POH = \angle POH'$ چون OP نیمساز است. پس به حالت (و ز) هم‌نهشت‌اند و $PH = PH'$؛ یعنی P از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۳۱ صفحه ۹۹ تمرین

۱ــ در هر شکل بعضی ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است پیدا کنید و حالت هم‌نهشتی را بنویسید.

برای هر شکل بررسی می‌کنیم که آیا یکی از حالت‌های (ض ض ض)، (ض ز ض)، (ز ض ز) و برای مثلث قائم‌الزاویه (و ض) یا (و ز) برقرار است. اگر زاویه‌ی برابر بین دو ضلع برابر نباشد، یا فقط زاویه‌ها برابر باشند، اطلاعات کافی نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۲ صفحه ۹۹ تمرین

۲ــ اجزای مساوی را پیدا و علامت‌گذاری کنید و حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید. الف) خط d از مرکز دایره می‌گذرد و دو خط a و b بر قطر دایره عمودند. ب) خط p از مرکز دایره گذشته است. ج) نقطه‌ی O مرکز مشترک دو دایره و پاره‌خط‌های AB و CD به ترتیب بر OB و OD عمودند.

- الف) دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های متقابل به رأس برابر در مرکز دایره و شعاع‌های برابر؛ حالت (و ز).
- ب) شعاع‌ها برابرند و زاویه‌های متقابل به رأس مساوی‌اند؛ دو مثلث (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند.
- ج) $OA = OC$ (شعاع دایره‌ی بزرگ)، $OB = OD$ (شعاع دایره‌ی کوچک) و $\angle B = \angle D = 90^\circ$؛ دو مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع برابر: (و ض).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۳ صفحه ۹۹ تمرین

۳ــ در هریک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید هر مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث دیگر منطبق کرد.

- الف) تقارن محوری نسبت به خط d (که از مرکز می‌گذرد).

- ب) دوران 180° حول مرکز دایره (نقطه‌ای که p از آن می‌گذرد).
- ج) دوران حول نقطه‌ی O (مرکز مشترک دو دایره) یا در صورت قرینه بودن، تقارن نسبت به خطی که از O می‌گذرد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۴ صفحه ۱۰۰ تمرین ترکیبی

۱ــ در شکل، سطح شیب‌داری را می‌بینید (ابعاد ۵۵، ۲۲ و ۱۵ متر). طول این سطح شیب‌دار (x) را به دست آورید.

سطح شیب‌دار وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های قائم آن $55 - 22 = 33$ متر (طول افقی) و ۱۵ متر (ارتفاع) است:

$x^2 = 33^2 + 15^2 = 1089 + 225 = 1314 \Rightarrow x \approx 36.2$ متر.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۵ صفحه ۱۰۰ تمرین ترکیبی

۲ــ الگوی شکل با مثلث‌های هم‌نهشت (ضلع‌های ۲، ۴ و ۵) ساخته می‌شود. الف) دو شکل بعدی را رسم کنید. ب) محیط هر شکل را پیدا کنید. ج) محیط شکل شماره‌ی ۶ چقدر می‌شود؟ د) محیط شکل شماره‌ی ۷ چقدر می‌شود؟

هر مثلث جدید که به شکل قبل اضافه می‌شود، یک ضلع مشترک پنهان می‌کند و دو ضلع جدید (۲ و ۵) به محیط می‌افزاید:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۶	۷
محیط	11	18	25	46	53

الف) هر شکل جدید با افزودن یک مثلث هم‌نهشت دیگر به انتهای شکل قبل رسم می‌شود. ب) محیط شکل nام: $7n + 4$. ج) $7 \times 6 + 4 = 46$ د) $7 \times 7 + 4 = 53$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir